

## الباب الثاني

### تعريف الأعداد

« ما العدد » ، سؤال كثيراً ما سئل ولم يجب عنه جواباً صحيحاً إلا في أيامنا ، وجاءت هذه الإجابة في كتاب فريج « أسس الحساب » الذي وضعه عام ١٨٨٤ (١) . ومع أن هذا الكتاب عظيم الأهمية وهو كتيب صغير ليس بالصعب ، إلا أنه لم يلفت الأنظار ، وبقى تعريف العدد الذي اشتمل عليه مجهولاً تقريباً إلى أن كشف عنه مؤلف هذا الكتاب عام ١٩٠١ .

وعندما نبحت عن تعريف العدد ، فأول ما يجب توضيحه هو ما يمكن أن نسميه « أجرومية » البحث . وكثير من الفلاسفة في محاولاتهم تعريف العدد إنما هم في الواقع يشتغلون بتعريف « كثرة » Plurality ، وهو أمر مختلف تماماً . فالعدد هو الخاصية التي تميز الأعداد تماماً مثل الإنسان فهو الخاصية التي تميز الناس ، فالكثرة ليست حالة من العدد ، وإنما حالة لعدد خاص له ، فثلاثي رجال ، مثلاً ، حالة للعدد ٣ ، والعدد ٣ حالة من حالات العدد ، ولكن الثلاثي ليس حالة للعدد ، وهذه المسألة قد تبدو أولية لا يجدر أن تذكر ، ولكنها غابت عن الفلاسفة فيما عدا القليل منهم .

والعدد الخاص ليس متطابقاً مع المجموعة التي لها هذا العدد ، فالعدد ٣ ليس متطابقاً مع الثلاثي المكون من أحمد ، وعلي ، ومحمد ؛ لأن العدد ٣ شيء مشترك بين جميع الثلاثيات ويميزها عن المجموعات الأخرى . العدد شيء يميز مجموعات معينة ، وهي تلك التي لها هذا العدد .

---

(١) ونجد نفس الجواب بشكل أتم وأوفى في كتابه Grundgesetze der Arithmetik Vol. I. 1893.

وبدلاً من الكلام عن المجموعة « Collection » سنتكلم كقاعدة عن الفصل Class أو في بعض الأحيان عن المنظومة « Set » . وتستخدم في الرياضيات ألفاظ أخرى للتعبير عن نفس الشيء كقولنا « الجملة Aggregate أو « متعدد » Manifold . وسنتكلم كثيراً عن الفصول فيما يلي من هذا الكتاب ، وستقصر الكلام هنا على القدر الضروري . ولكن هناك بعض الملاحظات التي يجب إيرادها مباشرة .

يمكن تعريف الفصل أو المجموعة بطريقتين تبدوان لأول وهلة متميزتين تماماً . فقد نسردها أعضاءها كأن نقول « المجموعة التي أقصدها هي أحمد ، علي ، محمد » أو قد نذكر خاصية معرفة كأن نقول « الجنس البشري » أو « سكان لندن » . ويسمى التعريف الذي يسرد الأعضاء التعريف « بالماصدق » ويسمى التعريف الذي يذكر خاصية معرفة « بالمفهوم » . ومن هذين النوعين فالتعريف بالمفهوم أساسى من الوجهة المنطقية أكثر من الآخر . والاعتبار أن الآتيان يوضحان ذلك : ( ١ ) أن التعريف بالما صدق يمكن أن يرد دائماً إلى التعريف بالمفهوم ( ٢ ) أن التعريف بالمفهوم لا يمكن أن يرد إلى التعريف بالما صدق حتى ولو كان ذلك من الوجهة النظرية فقط .

ونفسر هذا بأن نقول :

( ١ ) أحمد ، علي ، محمد . جميعهم لهم خاصية معينة ليست لأى شيء آخر في الكون بأكمله ، وهي خاصية كونه إما أحمد ، أو علي ، أو محمد ، ويمكن إستخدام هذه الخاصية كتعريف بالمفهوم للفصل المكون من أحمد ، علي ، محمد . خذ هذه الصيغة « س هو أحمد أو س هو علي أو س هو محمد » فهذه الصيغة صحيحة لثلاث سينات تماماً هي أحمد ، علي ، محمد . ومن هذه الوجهة فهي تشبه معادلة الدرجة الثالثة بجذورها الثلاثة ، ويمكن أن تؤخذ على أنها تعيين خاصة مشتركة لأعضاء الفصل المكون من هؤلاء الرجال الثلاثة وينفردون بها ، ويمكن أن يقال نفس الشيء عن أى فصل يعطى من جهة ما صدقاته .

( ٢ ) من الواضح ، في خبراتنا أننا نستطيع أن نعرف الكثير عن الفصل

( م ٢ - مقدمة للفلسفة الرياضية )

دون أن نستطيع سرد أعضائه . فلا واحد يستطيع أن يسرد جميع الرجال ، ولا حتى جميع سكان لندن . ومع ذلك فنحن نعرف الكثير عن هذين الفصلين . وهذا يكفي لبيان أن التعريف بالمصدق ليس ضروريا لمعرفة الفصل . وعندما يأتي الكلام عن الفصول اللامتناهية سنجد أن السرد غير ممكن — حتى من الناحية النظرية — لأى مخلوق تقدر له حياة محدودة الأجل . ولا نستطيع سرد جميع الأعداد الطبيعية فهي ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠٠ وهكذا . وعند موضع معين يجب أن نقنع بهذه العبارة « وهكذا » . ولا نستطيع سرد جميع الكسور ، ولا جميع الأعداد الصماء أو أية مجموعة لا متناهية أخرى . وإذن فعرفتنا بالنسبة لهذه المجموعات إنما يمكن أن تشتق فقط من تعريفها بالمفهوم .

وتأتى أهمية هذه الملاحظات ، عندما نبحث فى تعريف العدد ، من ثلاث جهات مختلفة : فأول الأمر أن الأعداد ذاتها تشكل مجموعة لا متناهية ، ولا يمكن تعريفها إذن بالسرد . وثانياً ، المجموعات ذات العدد المعلوم من الحدود ، تشكل بذاتها مجموعة لا متناهية . فمثلا نفترض أن هناك مجموعة لامتناهية من الثلاثيات فى العالم ، لأنه لو كان الأمر على عكس ذلك لكان المجموع الكلى للأشياء فى العالم متناهيا ، وهذا غير متنظر ، وإن كان محتملا . ثالثاً ، نريد أن نعرف العدد بطريقة تسمح بإمكان الأعداد اللامتناهية . ويجب إذن أن نستطيع الكلام عن عدد الحدود فى مجموعة لامتناهية ، ومثل هذه المجموعة يجب أن تعرف بالمفهوم أى بخاصة مشتركة بين جميع الأعضاء وينفردون بها .

والفصل والخاصية المعرفة له يمكن من الوجهة العملية وضع أحدهما بدل الآخر فى كثير من الأغراض ، والفرق الهام بينهما هو أنه إنما يوجد فصل واحد له منظومة معلومة من الأعضاء ، بينما توجد دائماً خصائص كثيرة بها يمكن تعريف فصل معلوم . فالناس يمكن تعريفهم بنوى القدمين معدومي الريش ، أو الحيوانات العاقلة ، أو ( وهو الأصح ) بتلك الصفات

التي ينسبها سويفت Swift لمخلوقاته الغريبة . وهذه الحقيقة من أن الخاصية المعروفة ليست فريدة بحال ما هي التي تجعل الفصول شيئاً مفيداً ، وإلا اقمنا بالخواص المشتركة والتي ينفرد بها أعضاؤها ، وأى من الخواص يمكن أن نستخدم بدلا من الفصل عندما لا تكون هناك أهمية للفردانية .

ونرجع الآن إلى تعريف العدد فنقول إنه من الواضح أن العدد طريقة بها نجمع معاً مجموعات معينة هي تلك المجموعات التي لها عدد معلوم من الحدود ، فقد ننظر إلى جميع الأزواج في حزمة وجميع الثلاثيات في أخرى ، وهكذا ؛ ونحصل بهذه الطريقة على حزمات مختلفة من المجموعات ، وكل حزمة مكونة من جميع المجموعات التي لها عدد معين من الحدود . وكل حزمة فهي فصل أعضاؤه مجموعات أى فصول ، وإذن فكل واحد منها هو فصل فصول . فالحزمة المكونة من جميع الأزواج مثلا هي فصل فصول ، وكل زوج فصل من عضوين ، وحزمة الأزواج كلها فصل له عدد لا نهاية له من الحدود كل واحد منها فصل من عضوين .

كيف نحكم بأن مجموعتين ينتميان لنفس الحزمة ؟ الجواب المحتوم هو « استخرج عدد الحدود في كل منهما ، وضعهما في نفس الحزمة إذا كان لهما نفس عدد الحدود » ولكن هذا الجواب يفترض مقدما أننا قد عرفنا الأعداد ، وأنا نعرف كيف نكتشف عدد الحدود في مجموعة . ولقد تعودنا على عمليات العد إلى درجة أن مثل هذا الافتراض قد يمر دون أن نلاحظه . والواقع أن عملية العد ، مهما تكن مألوفة ، إلا أنها من أعقد العمليات ، فضلا عن أننا نستطيعها كطريقة للكشف عن عدد حدود المجموعة عندما تكون هذه المجموعة متناهية . وتعريفنا للعدد يجب ألا يفترض مقدما أن جميع الأعداد متناهية . وعلى أية حال نحن لا نستطيع - دون أن ندور في حلقة مفرغة - أن نستخدم العد لتعريف الأعداد ، لأن الأعداد تستخدم في العد ، ونحتاج إذن إلى طريقة أخرى ما لتحكم إذا كانت مجموعتان لهما نفس العدد من الحدود .

فن ناحية الواقع ، الأبسط منطقياً أن نكتشف هل لمجموعتين نفس

العدد من الحدود ، من أن نعرف ما هذا العدد . ونوضح هذا بمثال . لو لم يكن هناك تعدد في الزوجات ولا تعدد في الأزواج في العالم فن الواضح أن عدد الأزواج الأحياء في أية لحظة هو بالضبط نفس عدد الزوجات . ونحن لا نحتاج في هذا إلى إحصاء ، ولا نحتاج إلى أن نعرف العدد الفعلي للأزواج والزوجات فنحن نعرف أن العدد يجب أن يكون عين العدد في المجموعتين ، لأن كل زوج له زوجة واحدة وكل زوجة لها زوج واحد ، والعلاقة بين الزوج والزوجة هي ما نسميه علاقة « واحد بواحد » .

يقال للعلاقة إنها علاقة « واحد بواحد » إذا تحقق الشرطان الآتيان : إذا كانت س لها هذه العلاقة مع ص ، فلا حد آخر س له نفس العلاقة مع ص ، ولم تكن لـ س نفس العلاقة مع أي حد آخر ص غير ص . وعندما يتحقق الشرط الأول فقط من هذين الشرطين تسمى العلاقة ، علاقة « واحد بكثير » وعندما يتحقق الشرط الثاني فقط تسمى العلاقة ، علاقة « كثير بواحد » . ومما تجدر ملاحظته أن العدد « ١ » لا يستخدم في هذه التعاريف .

في الدول المسيحية علاقة الزوج بالزوجة علاقة « واحد بواحد » . وفي الدول الإسلامية قد تكون علاقة « واحد بكثير » وفي البيت قد تكون علاقة « كثير بواحد » وعلاقة الوالد بالولد علاقة واحد بكثير ، وعلاقة الولد بالوالد هي علاقة كثير بواحد ، ولكن علاقة أكبر الأولاد بالوالد هي علاقة واحد بواحد . وإذا كان ن أي عدد ، فعلاقة العدد ن بالعدد ن + ١ هي واحد بواحد وكذلك علاقة ن بالعدد ٢ ن أو ٣ ن ، وإذا اقتصرنا على الأعداد الموجبة فقط فعلاقة ن بالعدد ٢ ن هي علاقة واحد بواحد ، ولكن إذا أدخلنا الأعداد السالبة فتصبح علاقة إثنين بواحد ، لأن ن ، - ن هما نفس المربع - وتكفي هذه الأمثلة لتوضيح مفاهيم العلاقات واحد بواحد ، واحد بكثير ، كثير بواحد ، وهي العلاقات التي تلعب دوراً هاماً في أصول الرياضيات ، لا بالنسبة إلى تعريف الأعداد فقط ، وإنما بالنسبة إلى أمور كثيرة أخرى لها بها صلة .

يقال للفصلين إنهما « متشابهان » عندما تكون هناك علاقة واحد بواحد تربط حدود أحد الفصلين كل واحد منها بحد واحد من الفصل الآخر ، وذلك بنفس الطريقة التي بها تربط علاقة زواج الأزواج بالزوجات ، وسنأتى هنا على بعض التعاريف الأولية التي تساعد على صياغة هذا التعريف بدقة أكثر ، فصل الحدود التي لها علاقة معلومة بشيء ما أو غيره يسمى ميدان هذه العلاقة ، وبذلك يكون الآباء ميدان علاقة الوالد بالطفل ، والأزواج ميدان علاقة الزوج بالزوجة ، والزوجات ميدان العلاقة بين الزوجة والزوج ، والأزواج والزوجات معاً ميدان علاقة الزواج ، ويقال إن علاقة الزوجة الزوج هي عكس علاقة الزوج للزوجة ، وبالمثل أصغر عكس أكبر ، بعد عكس قبل ، وهكذا . وبصفة عامة عكس علاقة معلومة هو تلك العلاقة التي تقوم بين ص ، س كلما كانت العلاقة المعلومة تقوم بين س ، ص ، والميدان العكسى لأى علاقة هو ميدان عكسها ، وإذن ففصل الزوجات هو للميدان العكسى لعلاقة الزوج بالزوجة ونستطيع الآن أن نصوغ تعريفنا المتشابه كما يلي :

يقال إن فصلاً يشابه آخر عندما تكون هناك علاقة واحد بواحد ميدانها أحد الفصلين وميدانها العكس الفصل الآخر :

ومن السهل إثبات ( ١ ) أن كل فصل يشابه نفسه ( ٢ ) أنه إذا كان فصل أ يشابه فصل ب ، فإن ب يشابه أ ( ٣ ) إذا كان أ يشابه ب ، ب يشابه ج فإن أ يشابه ج ، ويقال إن العلاقة إنعكاسية عندما تكون لها الخاصية الأولى ، وتمثالية إذا كانت لها الخاصية الثانية ، ومتعدية إذا كانت لها الخاصية الثالثة : وواضح أن العلاقة إذا كانت تمثالية ومتعدية فيجب أن تكون إنعكاسية على مدى ميدانها . والعلاقات التي لها هذه الخواص هي نوع هام من العلاقات . وجددير بالذكر أن التشابه هو نوع واحد من هذه العلاقات :

ومن الواضح للفطرة السليمة أن فصلين متناهيين لهما نفس عدد الحدود إذا كانا متشابهين ، ولكن ليس في الحالات الأخرى . وعملية العد عبارة عن

إقامة إرتباط واحد بواحد بين منظومة الأشياء المعدودة وبين الأعداد الطبيعية ( باستثناء الصفر ) التي تستخدم في العملية ، وتخرج الفطرة السليمة من ذلك بأن هناك أشياء في المنظومة التي نعدّها بقدر ما هناك من أعداد إلى آخر عدد نستخدمه في العد ، ونحن نعلم أيضاً أننا إذا قصرنا بحثنا على الأعداد المنتهية فإن هناك بالضبط من الأعداد من أ إلى ن ، ومن ثم ينتج أن آخر عدد مستخدم في العد هو عدد حدود المجموعة ، بشرط أن تكون المجموعة متناهية . ولكن هذه النتيجة ، فضلاً عن أنها لا تنطبق إلا على المجموعات المنتهية فإنها تفترض هذه الحقيقة وتعتمد عليها وهي أن الفصلين المتشابهين لهما نفس عدد الحدود ، ذلك أننا عندما نعد ١٠ أشياء مثلاً ، إنما نبين أن منظومة هذه الأشياء تشابه منظومة الأعداد من ١ إلى ١٠ ، وفكرة التشابه من الوجهة المنطقية مفروضة من قبل في عملية العد ؛ وهي منطقياً أبسط وإن كانت مألوفة بدرجة أقل من فكرة العد ذاتها ، في العد يلزم أن نأخذ الأشياء المعدودة في ترتيب معين كأول ، ثان ، ثالث ... إلخ ، ولكن الترتيب ليس من جوهر العدد ، فهو من وجهة النظر المنطقية إضافة لا دخل لها في الموضوع ، كما أنه تعقيد لا تملية الضرورة ، وفكرة التشابه لا تتطلب ترتيباً ، فمثلاً رأينا أن عدد الأزواج نرعى عدد الزوجات ، دون أن تكون بنا حاجة إلى تأسيس ترتيب للأسبقية فيما بينهم ، وفكرة التشابه لا تتطلب كذلك أن تكون الفصول المتشابهة متناهية ، نجد مثلاً الأعداد الطبيعية ( باستثناء الصفر ) في ناحية ، والكسور التي بسطها ١ في الناحية الأخرى ، فمن الواضح أنه يمكننا أن نربط بين ٢ ، ١/٢ ، وبين ٣ ، ١/٣ ، وهكذا ، وبذلك ثبت أن الفصلين متشابهان .

ونستطيع إذن أن نستخدم فكرة « التشابه » لنحكم متى تنتمي مجموعتان إلى نفس الحزمة بالمعنى الذي أثّرنا فيه السؤال في أوائل هذا الباب ، ونحتاج إلى عمل حزمة تشتمل على الفصل الذي ليس له أعضاء ، وهذه ستكون للعدد « ٠ » ثم نحتاج إلى حزمة من كل الفصول التي لها عضو واحد ، وهذه ستكون للعدد ١ ، ثم للعدد ٢ نحتاج إلى حزمة مكونة من جميع الأزواج ،

ثم حزمة مكونة من جميع الثلاثيات وهكذا ، فإذا علمت مجموعة أمكن تعريف الحزمة التي تنتمي إليها بأنها فصل جميع تلك المجموعات المتشابهة معها ومن السهل أن نرى أنه إذا كان للمجموعة ثلاثة أعضاء (مثلا) فإن فصل المجموعات المتشابهة معها هو فصل الثلاثيات . ومهما يكن عدد الحدود في المجموعة ، فان تلك المجموعات المتشابهة معها سيكون لها نفس عدد الحدود ، ونستطيع أن نأخذ هذا كتعريف لقولنا « له نفس عدد الحدود » وواضح أن هذا يعطى نتائج متطابقة مع الاستخدام العادى ، ما دمتا نقصر أنفسنا على المجموعات المنتهية .

وإلى هنا لم نقترح أى شىء فيه أية درجة من التناقض ، ولكننا عندما أتى إلى التعريف الفعلى للعدد ، لا نستطيع أن نتجنب ما يبدو لأول وهلة تناقضا ، وإن كان سرعان ما يتلاشى هذا الانطباع ، ومن الطبيعى أن يفكر فى فصل الأزواج (مثلا) على أنه شىء مختلف عن العدد ٢ ، ليس هناك أقل شك فى فصل الأزواج ، فهو معروف وليس من العسير تعريفه ، ولكن العدد ٢ ، بأى معنى آخر ، فهو شىء ميتافيزيقي لا نشعر يقينا بوجوده أبداً . فمن الحكمة إذن أن نقنع بفصل الأزواج ، الذى نحن متأكدون منه ، بدلا من أن نجرب وراء عدد ٢ يصعب علينا دائما أن نمسك بتلابيبه ، وعلى ذلك نضع التعريف التالى :

« عدد الفصل هو فصل جميع الفصول المشابهة له »

وإذن فعدد الزوج هو فصل جميع الأزواج ، وفى الواقع فصل جميع الأزواج هو العدد ٢ بحسب تعريفنا ، وإذا صرفنا النظر عن قليل من الغرابة فى هذا التعريف فانه يضمن التحديد وعدم الشك ، وليس من الصعب إثبات أن الأعداد متى عرفت بهذه الطريقة فلها جميع الخواص التي نتوقع أن تكون للأعداد .

ونستطيع الآن أن نسير نحو تعريف الأعداد بصفة عامة بأنها أية واحدة من الحزم التي فيها يجمع التشابه الفصول . وسيكون العدد منظومة من



الفصول بحيث يكون أى إثنين متشابهين الواحد بالآخر ، ولا فصل خارج المنظومة يتشابه مع فصل داخل المنظومة ، وبعبارة أخرى العدد ( بصفة عامة ) هو أية مجموعة هي عدد واحد من أعضائها ، أو في عبارة أكثر بساطة :

العدد هو أى شيء هو عدد فصل ما .

ومثل هذا التعريف له مظهر لفظي هو أنه دائري ، ولكن الحقيقة غير ذلك . فنحن نعرف « عدد فصل معلوم » دون أن نستخدم مفهوم العدد بصفة عامة ، ولذلك يمكننا أن نعرف العدد بصفة عامة بدلالة « عدد فصل معلوم » دون أن تقع في أى خطأ منطقي .

والتعاريف التي من هذا القبيل في الواقع شائعة جداً ، فمثلا فصل الآباء يجب تعريفه بأن نعرف أولاً ما هو أن تكون أبا لشخص ما ، وحينئذ يكون فصل الآباء هو جميع هؤلاء الذين هم آباء أشخاص ما . كذلك إذا أردنا أن نعرف الأعداد المربعة يجب علينا أن نعرف أولاً ما نقصده من أن عدداً ما هو مربع عدد آخر . وعندئذ نعرف الأعداد المربعة بأنها تلك التي تكون مربعات أعداد أخرى ومثل هذا الإجراء عادى جداً ، ومن المهم أن ندرك أنه مشروع ، وكثيراً ما يكون ضرورياً .

لقد أعطينا الآن تعريفاً للأعداد يمكن إستخدامه للمجموعات المنتهية وبقى أن نرى كيف يمكن إستخدامه للمجموعات اللامتناهية ، ولكن يجب علينا أن نقرر ما نعني بالمتناهي واللامتناهي ، وهو مالا يمكن الخوض فيه في هذا الباب .